

Info: Reste des séries corrigées

Pas bcp de temps pour les questions à la fin du cours

Rappel: $\iiint$ très similaire à $\iint$

$$E = [a, b] \times [c, d] \times [r, s] \checkmark$$



Pour E plus général :

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y), \gamma(x) \leq y \leq \delta(x), a \leq x \leq b\}$$

ou des permutations de ceci

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} \int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

Examples 7.13

(i) Let $a > 0$, $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq a\}$

$$f(x, y, z) = x^2.$$

$$\textcircled{2} \quad z \geq 0, \quad x + y + z \leq a \Rightarrow \underline{0 \leq z \leq a - x - y}.$$

$\hookrightarrow 0 \leq a - x - y$

$$\textcircled{4} \quad y \geq 0, \quad 0 \leq a - x - y \Rightarrow \underline{0 \leq y \leq a - x}$$

$\hookrightarrow 0 \leq a - x$

$$\textcircled{x} \quad x \geq 0, \quad 0 \leq a - x \Rightarrow 0 \leq x \leq a.$$

$$\Rightarrow \iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^a \int_0^{a-x} \int_0^{a-x-y} x^2 dz dy dx$$

$$= \int_0^a \int_0^{a-x} x^2 [z]_{z=0}^{z=a-x-y} dy dx$$

$$= \int_0^a \int_0^{a-x} ax^2 - x^3 - x^2 y$$

$$= \dots = \frac{a}{60}$$

$$(iii) E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq x^2 - 2x + 1, x - y - z \geq 1, x - y + z \geq 1\}$$

Choisir : $\alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)$, $\alpha(x, z) \leq y \leq \beta(x, z)$

① ②

$$\alpha(y, z) \leq x \leq \beta(y, z)$$

③

On ne choisira pas, pour des raisons pédagogiques encadrer z puis y puis x

$$\textcircled{2} \quad y: \quad y \geq x^2 - 2x + 1 \quad x^2 - 2x + 1 \leq y \leq \min(x - z - 1, x + z - 1)$$

$$y \leq x - z - 1$$

$$y \leq x + z - 1$$

$$\text{Rem: } a \leq b, a \leq c$$

$$\Leftrightarrow a \leq \min(b, c)$$

$$\text{Si } z \geq 0, \quad \min(x - z - 1, x + z - 1) = x - z - 1$$

$$\text{Si } z \leq 0, \quad \min(x - z - 1, x + z - 1) = x + z - 1$$

$$\Rightarrow \min(x - z - 1, x + z - 1) = \begin{cases} x - z - 1 & \text{si } z \geq 0 \\ x + z - 1 & \text{si } z \leq 0 \end{cases} \quad \text{!} \rightarrow \text{découpage sur } z.$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 \leq y \leq \begin{cases} x - z - 1 & \text{si } z \geq 0 \\ x + z - 1 & \text{si } z \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{si } z \geq 0 \\ x^2 - 2x + 1 \leq x - z - 1 \\ \text{si } z \leq 0 \\ x^2 - 2x + 1 \leq x + z - 1 \end{cases}$$

$$\text{Choix: } \begin{cases} \gamma(x) \leq z \leq \delta(x) & \boxed{2.1} \\ \gamma(z) \leq x \leq \delta(z) & \boxed{2.2} \end{cases} \quad \text{tout ce qui reste.}$$

z: Si $z \leq 0$

$$x^2 - 2x + 1 \leq x + z - 1$$

$$z \leq 0$$

$$\Rightarrow \underline{x^2 - 3x + 2 \leq z \leq 0}$$

$$\hookrightarrow x^2 - 3x + 2 \leq 0$$

Si $z \geq 0$

$$x^2 - 2x + 1 \leq x - z - 1$$

$$z \geq 0$$

$$\Rightarrow \underline{0 \leq z \leq -x^2 + 3x - 2}$$

$$\hookrightarrow 0 \leq -x^2 + 3x - 2$$

x: Si $z \leq 0$

$$x^2 - 3x + 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-1) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [1, 2]$$

Si $z \geq 0$

$$-x^2 + 3x - 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in [1, 2]$$

Conclusion:

$$\int_1^2 \int_{x^2-3x+2}^0 \int_{x^2-2x+1}^{x+z-1} f(x, y, z) dy dz dx$$

$\{z \leq 0\}$

$$+ \int_1^2 \int_0^{-x^2+3x-2} \int_{x^2-2x+1}^{x-z-1} f(x, y, z) dy dz dx$$

$\{z \geq 0\}$

$$= \int_1^2 \left[\int_{x^2-3x+2}^0 \int_{x^2-2x+1}^{x+z-1} f(x, y, z) dy dz + \int_0^{-x^2+3x-2} \int_{x^2-2x+1}^{x-z-1} f(x, y, z) dy dz \right] dx$$

Autre chose qui peut apparaître :

$$\textcircled{3} \quad x: \quad y \geq x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - y \leq 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (1-y)}}{2} = 1 \pm \sqrt{y} \quad \rightarrow \boxed{y \geq 0}$$

$$\hookrightarrow \underline{1 - \sqrt{y} \leq x \leq 1 + \sqrt{y}}$$

$$\hookrightarrow 1 - \sqrt{y} \leq 1 + \sqrt{y}.$$

Pour les autres choix, voir manuscrit pages 78-92

Définition 7.14: Masse, volume, bary centre

Soit $E \subseteq \mathbb{R}^3$ fermé, borné.

(i) Si $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ (typiquement, dans le cas d'applications physiques $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+$) est la densité de masse du solide E . La masse totale du solide est

$$\int_E f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

(ii) Le volume de E , noté $\text{Vol}(E)$ est défini par

$$\text{Vol}(E) = \iiint_E 1 \, dx \, dy \, dz$$

(iii) Si $f : E \rightarrow \mathbb{R}_{(+)}$ est la densité de masse du solide E ,

le barycentre ou centre de masse ou centre de gravité de E est le point (x_c, y_c, z_c)

$$x_c = \frac{\iiint_E x \cdot f(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz}$$

$$y_c = \frac{\iiint_E y \cdot f(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz}$$

$$z_c = \frac{\iiint_E z \cdot f(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz}$$

En particulier, si
 $f \equiv 1$,

$$x_c = \frac{1}{\text{Vol } E} \iiint_E x dx dy dz$$

$$y_c = \frac{1}{\text{Vol } E} \iiint_E y dx dy dz$$

$$z_c = \frac{1}{\text{Vol } E} \iiint_E z dx dy dz.$$

Example 7.15

Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 4x + 2y + z \leq 8\}$

densité de masse = 1.

$$z: z \geq 0, 4x + 2y + z \leq 8 \Rightarrow \underline{0 \leq z \leq 8 - 4x - 2y}$$

$\hookrightarrow 0 \leq 8 - 4x - 2y$

$$y: y \geq 0, 0 \leq 8 - 4x - 2y \Rightarrow \underline{0 \leq y \leq 4 - 2x}$$

$\hookrightarrow 0 \leq 4 - 2x$

$$x: x \geq 0, 0 \leq 4 - 2x \Rightarrow 0 \leq x \leq 2.$$

$$\begin{aligned}
 Vol(E) &= \int_0^2 \int_0^{4-2x} \int_0^{8-4x-2y} 1 \, dz \, dy \, dx \\
 &= \int_0^2 \int_0^{4-2x} (8-4x-2y) \, dy \, dx = \dots = \frac{32}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \iiint_E x \, dx \, dy \, dz &= \int_0^2 \int_0^{4-2x} \int_0^{8-4x-2y} x \, dz \, dy \, dx \\
 &= \int_0^2 \int_0^{4-2x} (8x - 4x^2 - 2xy) \, dy \, dx = \dots = \frac{16}{3}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_c = \frac{16/3}{32/3} = \frac{1}{2}$$

$$\iiint_E y \, dx \, dy \, dz = \int_0^2 \int_0^{4-2x} \int_0^{8-4x-2y} y \, dz \, dy \, dx$$

$$= \int_0^2 \int_0^{4-2x} (8y - 4xy - 2y^2) dy dx = \dots = \frac{32}{3} \Rightarrow y_c = \frac{32/3}{32/3} = 1$$

$$\iiint_E z dx dy dz = \int_0^2 \int_0^{4-2x} \int_0^{8-4x-2y} z dz dy dx$$

$$= \int_0^2 \int_0^{4-2x} \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{z=0}^{z=8-4x-2y} dy dx = \dots = \frac{64}{3}$$

$$\Rightarrow z_c = \frac{64/3}{32/3} = 2.$$

$$\Rightarrow (x_c, y_c, z_c) = \left(\frac{1}{2}, 1, 2 \right)$$

Proposition 7.16 Propriétés algébriques de $\iint$

Soient $E \subseteq \mathbb{R}^3$ un fermé borné, $f, g \in C^0(E)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
 $E_1, E_2 \subseteq E$ deux fermés tq $\text{int}(E_1) \cap \text{int}(E_2) = \emptyset$

Alors :

$$(i) \iiint_E \alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z) dx dy dz$$

$$= \alpha \cdot \iiint_E f(x, y, z) dx dy dz + \beta \iiint_E g(x, y, z) dx dy dz$$

$$(ii) \iiint_{E_1 \cup E_2} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{E_1} f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_{E_2} f(x, y, z) dx dy dz$$

$$(iii) \text{ si } f \leq g, \iint_E f(x, y, z) dx dy dz \leq \iint_E g(x, y, z) dx dy dz$$

$$(iv) \text{ si } f \geq 0, \iint_{E_1} f(x, y, z) dx dy dz \leq \iint_E f(x, y, z) dx dy dz$$

Théorème 7.17 Formule de changement de variables dans $\mathbb{R}^3$
 Soient $E, F \subseteq \mathbb{R}^3$ deux fermés bornés, $\varphi: E \rightarrow F$

$(u, v, w) \mapsto \varphi(u, v, w)$, bijection de classe C^1 et $\forall (u, v, w) \in E$
 de $\det \nabla \varphi(u, v, w) \neq 0$. Alors,

$$\iiint_F f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_E f(\varphi(u, v, w)) \cdot \underbrace{|\det \nabla \varphi(u, v, w)|}_{\text{Jac } \varphi(u, v, w)} du dv dw$$

§7.4 Changement de coordonnées sphériques & cylindriques.

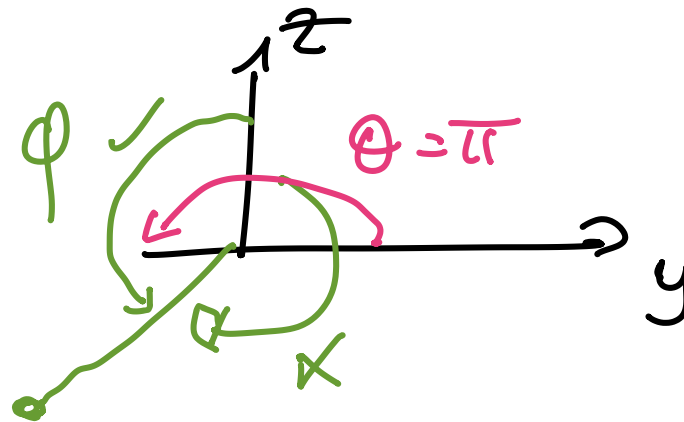
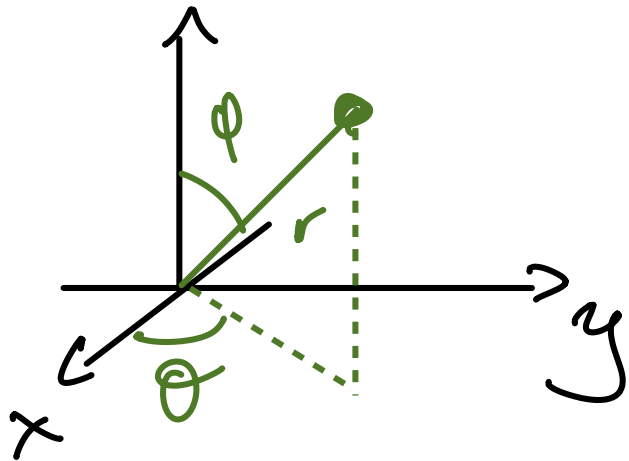
Exemple 7.18 : Coordonnées sphériques

$$\text{Soit } G: \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \times [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

peut être remplacé
par n'importe quel
intervalle de longueur
 2π

↳ ! ne peut pas être remplacé

$$G(r, \theta, \varphi) = (r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi)$$



$$\nabla G(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \varphi & 0 & -r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\text{Jac } G(r, \theta, \varphi) = \det \nabla G(r, \theta, \varphi) = -r^2 \sin \varphi.$$

Rem: $\varphi \in [0, \pi] \Rightarrow \sin \varphi \geq 0, \quad |\text{Jac } G(r, \theta, \varphi)| = r^2 \sin \varphi.$

Exemple 7.19

$\rightarrow$ indice que coord. sphériques sont bien!

(i) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}, \quad f(x, y, z) = 3z^2.$

$$(x, y, z) = (r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi) \quad r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi] \\ 0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \Leftrightarrow r^2 \leq 4 \stackrel{r \geq 0}{\Leftrightarrow} 0 \leq r \leq 2.$$

$$\Rightarrow \iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi) \cdot r^2 \sin \varphi d\varphi d\theta dr$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi 3r^2 \cos^2 \varphi r^2 \sin \varphi d\varphi d\theta dr$$

$$= \int_0^2 r^4 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi d\theta dr = \int_0^\pi 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \cdot \int_0^2 r^4 \int_0^{2\pi} 1 \cdot d\theta dr$$

scalar!

$$= 2\pi \int_0^2 r^4 dr \cdot \int_0^\pi 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi = \dots = \frac{128}{5} \pi$$

$$(ii) E = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \}$$

Coordonnées sphériques :

$$(x, y, z) = (r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi) \quad r \geq 0, \quad \theta \in [0, \pi] \\ \varphi \in [0, \pi].$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq r \leq 1$$

$$r \geq 0, \sin \varphi \geq 0$$

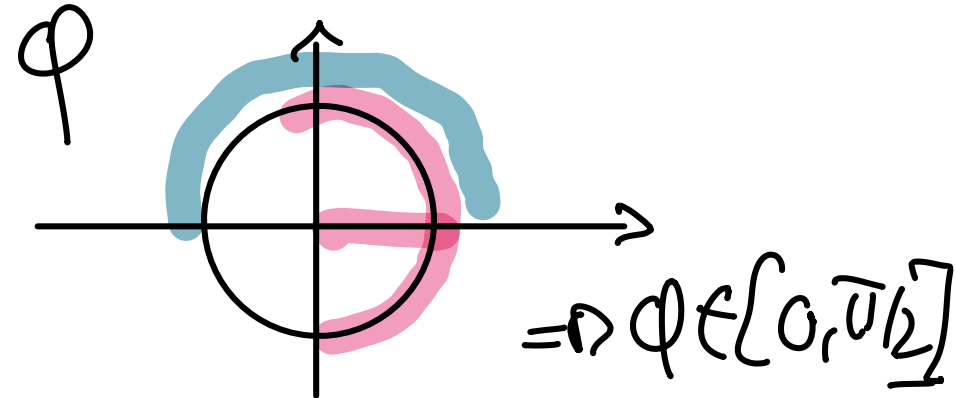
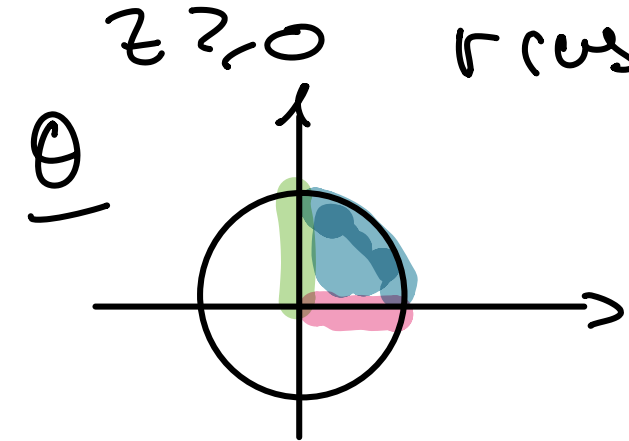
$$x \geq 0 \Leftrightarrow r \cos \theta \sin \varphi \geq 0 \Leftrightarrow \cos \theta \geq 0$$

$$y \geq 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \sin \theta \geq 0$$

$$z \geq 0 \quad r \cos \varphi \geq 0 \Leftrightarrow \cos \varphi \geq 0$$

$$\Rightarrow \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\Rightarrow \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$$



$$\Rightarrow \iiint_E f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} f(r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \phi) \cdot r^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta \, dr$$